Сопряженные уравнения и ценность информации

Лектор: д.ф.-м.н., профессор
Темирбеков Н.М.

Сформулируем задачу:

$A\varphi(x) = f(x)$, (4.1)

где A – линейный оператор, $\varphi(x)$ принадлежит множеству функций $D(A)$ с областью определения $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n (n \geq 1)$. Функций $A\varphi$, так же как и $f(x)$, предположим квадратично суммируемыми, принадлежащими вещественному гильбертову пространству $H = L_2(\Omega)$. При этом под xбудем понимать совокупность всех переменных задачи.

Введем в рассмотрение скалярное произведение функций $g(x)$ и $h(x)$ из H

$(g, h) = \int_\Omega g(x)h(x)dx$ (4.2)

- Любая величина, являющаяся линейным непрерывным функционалом от $\varphi(x)$, может быть выражена в виде скалярного произведения вида
- $J_p[\varphi] = \int_\Omega p(x)\varphi(x)dx = (p, \varphi)$. (4.3)

Здесь $J_p[\varphi]$ – рассматриваемый функционал, а $p(x)$ - характеристика прибора, измеряющего данный физический процесс.

Будем рассматривать физические величины, которые могут быть выражены в виде линейного непрерывного функционала от $\varphi(x)$:

- $J_p[\varphi] = (p, \varphi)$. (4.4)

Введем сопряженный оператор A^* , определяемый тождеством Лагранжа

- $(Ah, g) = (h, A^* g)$ (4.5)

Для любых функций g и h, которые принадлежат множествам $D(A)$ и $D(A^*)$ соответственно.

Сопряженне уравнение

$A^*\varphi^*(x) = p(x)$, (4.6)

Где $p(x)$ – та же функция измерительная прибора, которая содержится в функционале (4.4).

- Умножим скалярно уравнение (4.1) на φ^*, а уравнение (4.6) на φ и результаты вычтем один из другого. Тогда
- $(A\varphi, \varphi^*) - (\varphi, A^*\varphi^*) = (f, \varphi^*) - (p, \varphi)$. (4.7)

$(f, \varphi^*) - (p, \varphi) = 0$ (4.8)

$J_p[\varphi] = (p, \varphi),\ J_f[\varphi^*] = (f, \varphi^*)$, (4.9)

$J_p[\varphi] = J_f[\varphi^*]$. (4.10)

Если нам нужно найти значение функционала $J_p[\varphi]$, мы можем получить его двумя способами: либо решить уравнение (4.1) и определить эту величину по формуле

$$J_p[\varphi] = (p, \varphi),$$

Либо решить уравнение (4.6) и найти ту же величину по формуле

$$J_p[\varphi] = J_f[\varphi^*] = (f, \varphi^*).$$

Поскольку $J_p = J_f$, то функционалы будем обозначать J_p.

Каждому линейному функционалу $J_p[\varphi] = (p, \varphi)$ можно быть поставлена в соответствие функционал $\varphi^*(x)$, удовлетворяющая уравнение (4.6), причем в качестве свободного члена этого уравнения следует использовать именно функцию $p(x)$, характеризующую интересующий нас физический процесс или измерение.

Пусть в среде имеется “источник единичной мощности” , помещенный в точку $x = x_0$, т.е.

$f(x) = \delta(x - x_0)$. (4.11)

$\big(\varphi(x), \delta(x - x_0)\big) = \varphi(x_0)$,

$J_p[\varphi] = J_{f=\delta(x-x_0)}[\varphi^*] = \varphi^*(x_0)$. (4.12)

Отсюда следует, что сопряженная функция φ^* описывает зависимость функционала $J_p[\varphi] = (p, \varphi)$ от точки помещения источника единичной мощности.

Представим себе физическую систему, в которой измеряется некоторая величина $J_p[\varphi]$, являющаяся линейным функционалом от решения, связанного, с плотностью частиц $\varphi(x)$ в фазовом пространстве. Если в некоторую точку системы впустить определенное количество частиц или, наоборот, извлечь из нее эти частицы, то измеряемое значение величины $J_p[\varphi]$ будет соответственно увеличиваться или уменьшаться, это измерение будет зависеть от точки, в которой мы производим измерение числа частиц. Это зависимость описывается сопряженной функцией $\varphi^*(x)$, удовлетворяющей уравнению (4.6). Следовательно, сопряженная функция $\varphi^*(x)$ дает вклад частиц, находящихся в той или иной точке системы, в интересующий нас функционал $J_p[\varphi]$. Поэтому функцию φ^* иногда называют ценностью субстанции в точке x_0 по отношению к функционалу задачи. Естественно, что функционалы могут быть различными. Поэтому для каждого функционала должна быть сформулирована своя собственная задача (4.6) с заданной функцией $p(x)$.

Пример. Пусть основная задача (4.1) описывает простейший процесс диффузии и имеет вид

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} = f(x), x \in (0,1), \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad (4.13)$$

Где $f(x) -$ заданная функция.

Предположим, что имеется прибор, который измеряет некоторую величину

$$J_p[\varphi] = (p, \varphi) \equiv \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx, \quad (4.14)$$

Являющуюся линейным функционалом от решения φ задачи (4.13). Функция $p(x)$ связана с характеристикой прибора, и пусть она задается формулой

$$p(x) = p_0 sin\pi x, p_0 = const > 0. \quad (4.15)$$

$$J_p[\varphi] = p_0 \int_0^1 sin\pi x\varphi(x)dx. \quad (4.16)$$

$$-\frac{d^2\varphi^*}{dx^2} = p_0 sin\pi x,\ \ x \in (0,1), \varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0. \quad (4.17)$$

Решение сопряженной задачи (4.17)

$$\varphi^*(x) = \frac{p_0}{\pi^2} sin\pi x. \quad (4.18)$$

Значение функционала $J_p[\varphi]$ можно найти по второй из формул (4.9):

$$J_p[\varphi] = J_f[\varphi^*] = (f, \varphi^*),$$

$$J_p[\varphi] = \frac{p_0}{\pi^2} \int_0^1 f(x) sin\pi x dx. \quad (4.19)$$

При вычислении $J_p[\varphi]$ по формуле (4.19) нам не нужно решать задачу (4.13)

И находить φ, нужно лишь подставить заданную функцию $f(x)$ в (4.19).

Пусть в среде имеется “источник единичной мощности”, помещенный в точку $x = x_0$, т.е.

$f(x) = \delta(x - x_0)$.

Тогда из (4.19) получаем

$J_p[\varphi] = \frac{p_0}{\pi^2} sin\pi x_0$. (4.20)

Как следует из (4.12), правая часть (4.20) есть не что иное, как ценность информации о решении в точке x_0 по отношению к функционалу $J_p[\varphi] = (p_0 sin\pi x, \varphi)$. Из (4.20) легко сделать следующий вывод: если мы хотим поместить источник частиц в такую точку x_0, чтобы вклад их в функционал $J_p[\varphi]$ был максимальным, то надо поместить этот источник в точку $x_0 = 1/2$, поскольку

$$\max_{x_0} J_p[\varphi] = \max_{x_0} \frac{p_0}{\pi^2} sin\pi x_0 = \frac{p_0}{\pi^2}.$$

Если в элементе объем Δx около точки x мы изменим число частиц на величину δN будет выражено следующим уравнением:

$$\delta J_p = \delta N \varphi^*(x). \quad (4.21)$$

Если в рассматриваемой системе произведены некоторые малые изменения параметров, так что оператор A из (4.1) переходит в оператор $A + \delta A$, то это соответствует изменению числа частиц в каждом элементе Δx на величину $\delta N = -\Delta x \delta A \varphi$. Общее изменение функционала J_p при таком изменении запишем в виде

$$\delta J_p = -\int \varphi^*(x) \delta A \varphi(x) dx. \quad (4.22)$$

Соотношение (4.21) позволяет измерить распределение функции ценности в системе, изменяя известным образом число частиц в разных точках x системы и измеряя при этом соответствующие изменение величины J_p .

Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.